

УДК 519.61/.64:627.05

**Н. В. Медвідь**, аспірант,  
**П. М. Мартинюк**, канд. фіз.-мат. наук

Національний університет водного господарства  
та природокористування, м. Рівне

## **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВПЛИВУ НА НАДЛИШКОВІ НАПОРИ НАЯВНОСТІ ЗОНИ ВИМИВУ В ҐРУНТОВІЙ ГРЕБЛІ З ВОДОВОДОМ**

Побудовано математичну модель фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі з водоводом та зоною вимиву. Досліджено вплив наявності водоводу та зони вимиву на величини напорів та їх градієнтів. Проведено ряд числових експериментів та здійснено їх аналіз.

**Ключові слова:** *зона вимиву, фільтраційна консолідація, ґрунтова гребля, вільна поверхня.*

**Вступ.** У роботі [1] відмічено, що більше 80% побудованих за останні десятиліття в світі водопідпірних споруд припадає на долю ґрунтових гребель. В значній їх кількості для пропуску води широко використовуються водопропускні споруди трубчастої конструкції — водоводи. Наявність в тілі ґрунтової греблі водоводу суттєво впливає на характер фільтрації в наколотрубній зоні і при справній роботі водоводу, і, особливо, при його пошкодженнях.

З водоводами пов'язані дві основні проблеми: руйнування частини водоводу і, як наслідок, утворення зони вимиву ґрунту в місці такого пошкодження. Найбільш характерні види аварій і пошкоджень ґрунтових гребель при наявності водоводів, наступні [1]: суфозійний розмив ґрунту наколотрубної зони тіла греблі контактною зосередженою фільтрацією при справно працюючому водоводі; фільтраційні деформації і розмив ґрунтів тіла і основи ґрунтової греблі внаслідок посиленої зосередженої фільтрації через сильнопроникну або слабку основу під водоводом; додаткове насичення тіла греблі з підвищенням депресійної поверхні при пошкодженнях напірного водоводу ґрунтової греблі; фільтраційні деформації і суфозійний вимив тіла і основи ґрунтової греблі всередину безнапірного водоводу при його пошкодженнях; пошкодження експлуатаційних галерей з трубопроводами; фільтраційні деформації і розмив ґрунту тіла греблі при пошкодженнях сполучення водоприймальної вежі і водоводу; аварії та пошкодження напірних водоводів при зміні дії зовнішнього гідростатичного тиску фільтраційних вод.

Із досвіду вітчизняного та зарубіжного греблебудування відомо чимало випадків аварій і пошкоджень ґрунтових гребель, зв'язаних з наявністю водоводів в тілі греблі, при чому близько 40% із них ста-

валося по причині зосередженої фільтрації [7]. Однак, проведення натурних експериментів при проектуванні вказаних гідротехнічних споруд (ГТС) може вимагати затрат значних матеріальних ресурсів. Тому, прогноз поведінки ГТС інколи доцільніше робити засобами математичного моделювання [11].

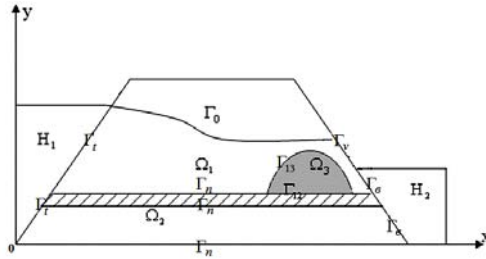
**Вихідні передумови.** Одна із основних умов зосередження уваги на проблемах гідротехнічного будівництва — це завдання забезпечення безаварійної та надійної роботи гідротехнічної споруди у весь період її експлуатації. Стосовно ґрунтових ГТС, основна проблема, яка впливає із вищесказаного, це забезпечення їх стійкості [9; 10]. Далі, одним із факторів, які зменшують стійкість укосів ґрунтових гребель, є наявність надлишкових напорів в поровій рідині пористого матеріалу греблі. Руйнування греблі може призвести до аварії з відповідними матеріальними збитками, наслідками для екологічної ситуації в регіоні, а також до людських жертв. Динаміку зміни надлишкових напорів в пористих середовищах можна досліджувати в рамках так званої теорії фільтраційної консолідації ґрунтів. Класична теорія фільтраційної консолідації ґрунтів викладена в роботах [8; 14–17].

Математичне моделювання процесів фільтраційної консолідації ґрунтів з урахуванням впливу техногенних факторів започатковане в роботі [3] і розвинуте в [4–6]. Але в жодній із вказаних робіт не враховано наявності в тілі ґрунтової греблі водоводу і можливої зони розмиву. Урахування вказаних факторів і є ціллю даної статті.

Математичне моделювання та дослідження процесів фільтраційної консолідації в тілі ґрунтової греблі приводить до складних нелінійних крайових задач математичної фізики. Тому необхідно застосовувати відомі або розробляти нові чисельні методи, які дозволяють розв'язувати задачі такого типу.

**Постановка задачі та її математична модель.** Розглянемо двовимірну задачу фільтраційної консолідації в тілі ґрунтової греблі, профіль якої зображений на рис.1. Водовід розбиває греблю на дві області: область  $\Omega_1$  та область  $\Omega_2$ . Зона вимиву — область  $\Omega_3$  з межами  $\Gamma_{12}$ ,  $\Gamma_{13}$ . Позначення на рис. 1:  $\Gamma_0$  — вільна межа (депресійна крива);  $\Gamma_v$  — проміжок височування;  $\Gamma_n$  — непроникні межі;  $\Gamma_e$  — межі нижнього б'єфу;  $\Gamma_f$  — межі верхнього б'єфу.

Припускається, що межа  $\Gamma_{12}$  водоводу є зруйнованою і повністю проникною для порової рідини. Також, для спрощення математичної моделі припускається, що зона вимиву  $\Omega_3$  є поки що незмінною в часі. Подальші дослідження будуть стосуватися задач, коли зона вимиву може динамічно змінюватися в часі.



**Рис. 1.** Профіль тіла ґрунтової греблі з водоводом та зоною вимиву

Зробимо наступні спрощуючі припущення: 1) зона розмиву  $\Omega_3$  поки що фіксована і в часі не змінює свого положення і форми; 2) оскільки метою статті є дослідження саме впливу зони розмиву на величини надлишкових напорів та їх градієнти, то поки що знехтуємо впливом техногенних факторів; 3) для розподілу напорів в зоні розмиву виконується рівняння Лапласа. Тоді математична модель двовимірної задачі фільтраційної консолідації тіла ґрунтової греблі з водоводом та зоною вимиву при врахуванні повзучості скелету ґрунту може бути описана наступною крайовою задачею [3; 8; 11; 16]:

$$2a_0 \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} + \beta_1(a_0 + a_1) \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{(1+e)(1+\xi)}{\gamma} \beta_1 \cdot \text{div}(K \nabla h) + \frac{(1+e)(1+\xi)}{\gamma} \frac{\partial}{\partial t} \text{div}(K \nabla h), \quad X = (x, y) \in \Omega_1 \cup \Omega_2, t > 0, \quad (1)$$

$$\Delta h(X) = 0, \quad X = (x, y) \in \Omega_3, t > 0, \quad (2)$$

$$u - ev = -K \nabla h, \quad X \in \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}, \quad (3)$$

$$h(X, 0) = H_0(X), \quad \frac{\partial h(X, t)}{\partial t} \Big|_{t=0} = 0, \quad X \in \overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}, \quad (4)$$

$$h(X, t) \Big|_{\Gamma_v \cup \Gamma_0} = y, \quad X \in \Gamma_v \cup \Gamma_0, \quad h(X, t) \Big|_{\Gamma_e} = H_2(X, t), \quad X \in \Gamma_e,$$

$$(\nabla h, n) \Big|_{\Gamma_n} = 0, \quad X \in \Gamma_n, \quad h(X, t) \Big|_{\Gamma_t} = H_1(X, t), \quad X \in \Gamma_t, \quad h(X) \Big|_{\Gamma_{12}} = y, \quad X \in \Gamma_{12},$$

$$[h(X)] \Big|_{\Gamma_{13}} = 0, \quad X \in \Gamma_{13}, \quad (5)$$

де  $H_0(X), H_1(X, t), H_2(X, t)$  — відомі функції,  $a_0$  — параметр миттєвої деформації скелету ґрунту,  $a_1$  — параметр повзучості скелету ґрунту,  $\gamma$  — питома вага порової рідини,  $h(X, t)$  — напір,  $K$  — коефіцієнт фільтрації, який в загальному випадку є тензором,  $u$  — вектор швидкості фільтрації,  $v$  — вектор швидкості руху твердих частинок ґрунту,  $e$  — коефіцієнт пористості ґрунту,  $\beta_1$  — показник

ступеня в законі повзучості, який визначається експериментальним шляхом,  $\xi$  — коефіцієнт бічного тиску ґрунту.

Вільна межа  $\Gamma_0$  (крива депресії) описується співвідношенням [13]

$$\varphi(X, t) = (y - h(X, t))|_{\Gamma_0} = 0, \quad (6)$$

і на ній задається кінематична гранична умова [13]

$$(u, n)|_{\Gamma_0} = \sigma \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (7)$$

де  $\sigma$  — пористість ґрунту.

У процесі ущільнення ґрунту, за рахунок зменшення пористості, верхня межа ґрунту буде просідати. Тобто, координати верхньої межі ґрунту будуть змінюватись в часі. Тому на даній межі має задаватись кінематична гранична умова, яка дозволяє в будь-який момент часу визначити положення даної межі [4]

$$\frac{dl}{dt} = \frac{2\gamma a}{(1+e)(1+\xi)} \int_0^{l(x,t)} \frac{\partial h}{\partial t} dx, \quad l(x, 0) = l_0(x). \quad (8)$$

Тут  $y = l(x, t)$  — рівняння верхньої рухомої межі масиву ґрунту. Для спрощення в кінематичній граничній умові (8) не враховується повзучість скелету ґрунту.

**Числовий розв'язок.** Для відшукування наближеного розв'язку задачі (1)–(8) використаємо метод радіальних базисних функцій [5; 18]. Для цього покриємо замикання області  $\overline{\Omega} = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \cup \Gamma$  вузловими точками  $(x_j, y_j), j = \overline{1, n}$ . Причому жодні дві точки не співпадають. Наближені значення функції  $h(X, t)$  будемо шукати у вигляді

$$h(X, t) \approx \sum_{j=1}^n h_j(t) \varphi_j(r_j, \varepsilon), \quad (9)$$

де  $\varepsilon$  — параметри форми;  $\varphi_j = \varphi(r_j, \varepsilon)$  — радіальна базисна функція, що залежить від відстані  $r_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2}, j = \overline{1, n}$ ;  $h_j(t)$  — невідомі коефіцієнти, які залежать лише від часу.

Покриємо замикання  $\overline{\Omega}$  області  $\Omega$  колокаційними точками  $(x_i, y_i), i = \overline{1, m}$ , де  $m \geq n$ . Позначимо  $\omega = \{i : (x_i, y_i) \in \Omega\}$ ,  $\gamma = \{i : (x_i, y_i) \in \Gamma\}$ . Через  $\gamma$  позначимо множину номерів всіх граничних колокаційних точок. Аналогічні визначення стосуються множин  $\omega_i, i = \overline{1, 3}, \gamma_6, \gamma_0, \gamma_v, \gamma_n, \gamma_{13}, \gamma_{12}$ . Введемо позначення

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m}, \quad m \geq n.$$

Підставивши (9) в рівняння (1) та (2) і початкові (4) та граничні умови (5) і використавши метод колокацій в точці ми отримаємо задачу Коші для системи нелінійних диференціальних рівнянь відносно невідомих  $H(t) = (h_1(t), \dots, h_n(t))^T$  в матричній формі

$$\begin{aligned} A \frac{d^2 H(t)}{dt^2} + B \frac{dH(t)}{dt} + R \cdot H(t) &= F, \\ \tilde{A}' \frac{dH(0)}{dt} &= 0, \tilde{A} \cdot H(0) = \tilde{F}, \end{aligned} \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} H(t) &= (h_1(t), h_2(t), \dots, h_n(t))^T, \quad F = \{f_i\}_{i=1}^m; \quad A = \{a_{ij}\}_{i=1, j=1}^{m, n}; \\ B &= \{b_{ij}\}_{i=1, j=1}^{m, n}; \quad R = \{r_{ij}\}_{i=1, j=1}^{m, n}; \quad \tilde{A} = \{\tilde{a}_{ij}\}_{i=1, j=1}^{m, n}; \quad \tilde{A}' = \{\tilde{a}'_{ij}\}_{i=1, j=1}^{m, n}; \quad \tilde{F} = \{\tilde{f}_i\}_{i=1}^m; \\ a_{ij} &= \begin{cases} 0, & i = \gamma \cup \omega_3; \\ 2a_0\varphi_j(r_{ij}, \varepsilon), & i \in \omega_1 \cup \omega_2; \end{cases} \\ \tilde{a}_{ij} &= \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_h); \quad \tilde{a}'_{ij} = \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_h); \quad \tilde{f}_i = H_0(X_i); \\ b_{ij} &= \begin{cases} \beta_1(a_0 + a_1)\varphi_j(r_{ij}, \varepsilon) - \frac{(1+e)(1+\xi)}{\gamma} \times \\ \times \left( \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + K \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial K}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + K \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} \right), & i \in \omega_1 \cup \omega_2; \\ 0, & i \in \omega_3 \cup \gamma; \end{cases} \\ f_i &= \begin{cases} y, & i \in \gamma_0 \cup \gamma_v \cup \gamma_{12}; \\ H_2, & i \in \gamma_\theta; \\ 0, & i \in \gamma_{13} \cup \gamma_n \cup \omega; \\ H_1, & i \in \gamma_t; \end{cases} \\ r_{ij} &= \begin{cases} -\frac{(1+e)(1+\xi)}{\gamma} \beta_1 \cdot \left( \frac{\partial K}{\partial x} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x} + K \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial x^2} + \frac{\partial K}{\partial y} \frac{\partial \varphi_j}{\partial y} + K \frac{\partial^2 \varphi_j}{\partial y^2} \right), & i \in \omega_1 \cup \omega_2; \\ \varphi_j(r_{ij}, \varepsilon_Z), & i \in \gamma_0 \cup \gamma_v \cup \gamma_t \cup \gamma_\theta \cup \gamma_{12}; \\ (\nabla \varphi_j, n), & i \in \gamma_n; \\ \nabla \varphi_j, & i \in \omega_3. \end{cases} \end{aligned}$$

Провівши дискретизацію задачі Коші (10) за повністю неявною різницевою схемою [6], маємо

$$\left( \frac{A}{\tau^2} + \frac{B(H^{(k)})}{\tau} + R(H^{(k)}) \right) \times H^{(k+1)} = F - \frac{A}{\tau^2} (H^{(k-1)} - 2H^{(k)}) + \frac{B(H^{(k)})}{\tau} H^{(k)},$$

$$\frac{\tilde{A}'}{\tau} H^{(1)} = \frac{\tilde{A}'}{\tau} H^{(0)}, \tilde{A} \cdot H^{(0)} = \tilde{F}.$$

Позначивши

$$Q = \frac{A}{\tau^2} + \frac{B(H^{(k)})}{\tau} + R \cdot (H^{(k)}),$$

$$P^{(4)} = F - \frac{A}{\tau^2} (H^{(k-1)} - 2H^{(k)}) + \frac{B(H^{(k)})}{\tau} H^{(k)},$$

отримаємо СЛАР

$$Q \cdot H^{(k+1)} = P, k = 1, 2, \dots, \quad (11)$$

$$\frac{\tilde{A}'}{\tau} H^{(1)} = \frac{\tilde{A}'}{\tau} H^{(0)}, \tilde{A} \cdot H^{(0)} = \tilde{F}.$$

Дана СЛАР має  $m$  рівнянь і  $n$  невідомих, причому  $m \gg n$ , а отже є перевизначеною. Щоб звести її до системи  $n \times n$  скористаємося методом найменших квадратів [2; 12]. Помножимо перше рівняння системи (11) зліва на матрицю  $(Q)^T$ , рівняння для початкового часо-

вого шару по часу на  $(\tilde{A})^T$ , а для першого шару на  $\left(\frac{\tilde{A}'}{\tau}\right)^T$

$$(Q)^T Q \cdot H^{(k+1)} = (Q)^T P,$$

$$\left(\frac{\tilde{A}'}{\tau}\right)^T \frac{\tilde{A}'}{\tau} H^{(1)} = \left(\frac{\tilde{A}'}{\tau}\right)^T \frac{\tilde{A}'}{\tau} H^{(0)}, (\tilde{A})^T \cdot \tilde{A} \cdot H^{(0)} = (\tilde{A})^T \cdot \tilde{F}. \quad (12)$$

Таким чином кожна із СЛАР (12) містить  $n$  рівнянь для відшукування  $n$  невідомих. Розв'язати дану систему можна методом Гауса.

Координати вузлових і колокаційних точок на кожному часовому шарі будуть змінюватись. Для їх визначення застосуємо кінематичну граничну умову (8). Підставивши (9) в (8) і провівши дискретизацію по часу, отримаємо

$$\frac{y_j^{(k+1)} - y_j^{(k)}}{dt} = \frac{2\gamma a}{(1+e)(1+\xi)} \int_0^{y_j^{(k)}} \sum_{j=1}^n \frac{h_j^{(k+1)} - h_j^{(k)}}{\tau} \varphi_j(r_j, \varepsilon) dy.$$

Інтеграл обчислюється за допомогою квадратурних формул.

Дискретизувавши кінематичну граничну умову (7) в часі, отримаємо

$$(u^{(k)}, n^{(k)}) = \sigma \frac{\varphi^{(k+1)}(X) - \varphi^{(k)}(X)}{\tau},$$

де  $(\varphi^{(k+1)} - \varphi^{(k)})$  — зміщення вільної межі відносно значення координат на  $k$ -му часовому шарі в напрямку зовнішньої нормалі. Далі маємо

$$\varphi^{(k+1)}(X) - \varphi^{(k)}(X) = \frac{\tau}{\sigma} \left( u_x^{(k)}(X) n_x^{(k)}(X) + u_y^{(k)}(X) n_y^{(k)}(X) \right), \quad X \in \Gamma_0.$$

**Результати числового експерименту.** Вхідні дані:

$$\sigma = 0.4, e = 0.7, \alpha = 0.5, \beta = 0.5, a_0 = 4 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2 / \text{Н}, H_1(t) = 20 \text{ м},$$

$$a_1 = 2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2 / \text{Н}, \gamma = 10^4 \text{ кг} / (\text{м}^2 \cdot \text{доба}^2), H_2(t) = 10 \text{ м}.$$

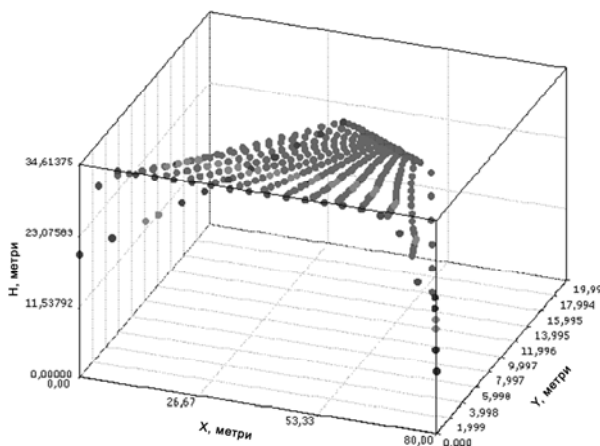
Для числових експериментів використовувалася мультиквадратична радіальна базисна функція  $\varphi(r, \varepsilon) = \sqrt{1 + (r\varepsilon)^2}$  з параметром форми  $\varepsilon = 10^{-7}$ ; кількість вузлових та колокаційних точок дорівнює 293.

Також для числових експериментів розглянемо випадок, коли початковий розподіл напорів в тілі греблі зумовлюється власною вагою ґрунту. Тобто,

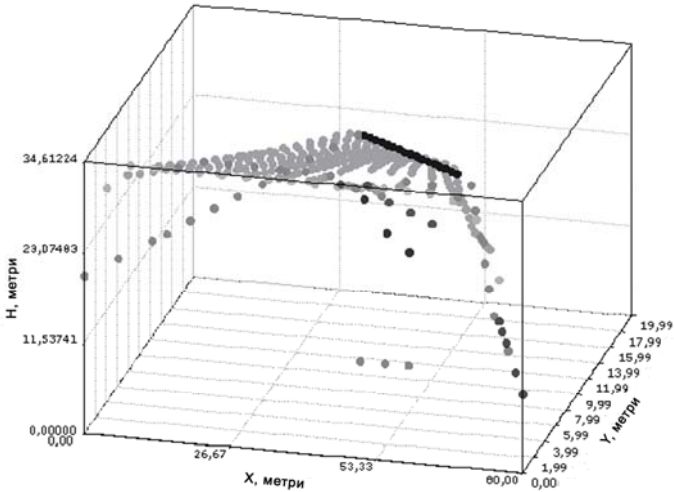
$$H_0(x, y) = y_{\Gamma} \frac{\gamma_{\Gamma}}{\gamma} + y,$$

де  $y_{\Gamma}$  — вертикальна відстань від точки з координатами  $(x, y)$  до верхньої межі греблі (висота стовпа ґрунту прикладеного до даної точки);  $\gamma_{\Gamma} = 1,95 \cdot 10^4 \text{ Па} / \text{м}^3$  — питома вага ґрунту;  $\gamma$  — питома вага порової води.

Коефіцієнт фільтрації  $K_h = 0.001 \text{ м} / \text{доба}$ , ґрунт греблі вважався однорідним та ізотропним за своїми фільтраційними характеристиками. Процес досліджувався протягом 360 діб, з кроком по часу 10 діб. Отримано значення надлишкових напорів та компонента  $\frac{\partial h}{\partial y}$  їх градієнта на момент часу 360 діб, які відображені графічно (рис. 2–рис. 7).

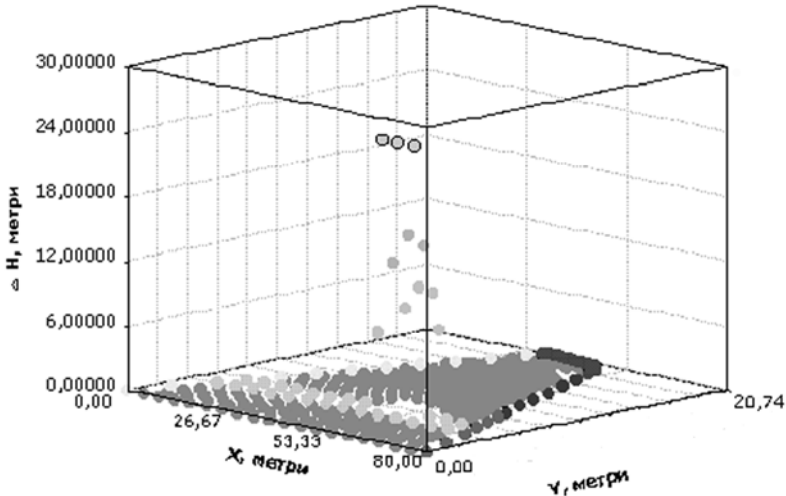


**Рис. 2.** Розподіл надлишкових напорів в тілі ґрунтової греблі з водоводом



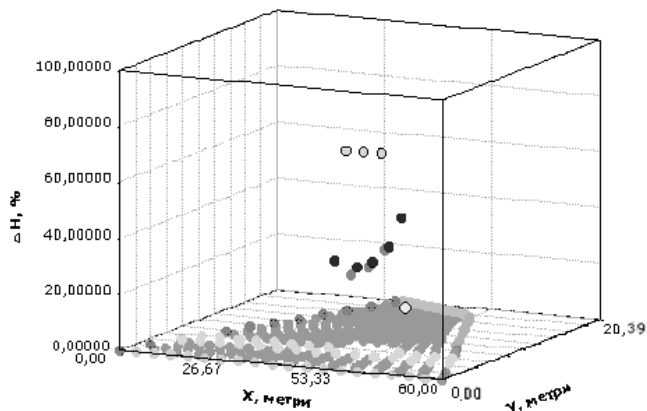
*Рис. 3. Розподіл надлишкових напорів в тілі ґрунтової греблі з водоводом та зоною вимиву*

З графіків 2 та 3 видно, що наявність зони вимиву в тілі греблі значним чином впливає на розподіл надлишкових напорів, особливо в самій зоні вимиву, де напір стає значно меншим. На графіку 3 видно, що в зоні вимиву значення надлишкових напорів зменшується приблизно до 20–30 метрів, а на трубі, де відбулося її руйнування, до 6 метрів.



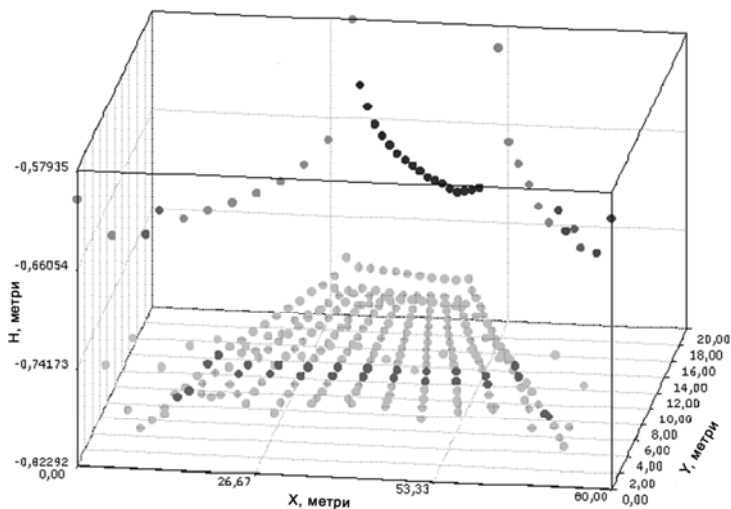
*Рис. 4. Різниця надлишкових напорів в ґрунтовій греблі з водоводом без та із зоною вимиву відповідно*



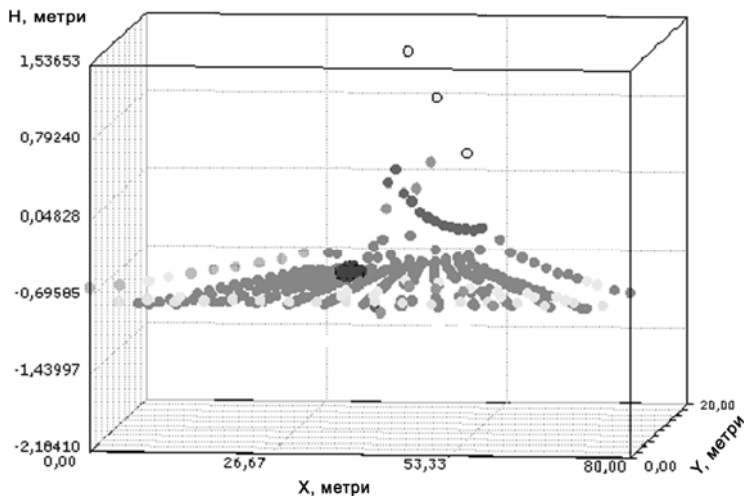


**Рис. 5.** Відносна різниця надлишкових напорів в ґрунтовій греблі з водоводом без та із зоною вимиву відповідно

Графіки 4 та 5 показують абсолютну та відносну різницю між розподілом надлишкових напорів в тілі греблі з водоводом та водоводом і зоною вимиву, відповідно. Як можна побачити, в зоні вимиву максимальна різниця складає близько 12–15 метрів або 30%, а на трубі близько 20 метрів або 55%.



**Рис. 6.** Розподіл компонента градієнта напорів  $\frac{\partial h}{\partial y}$  в тілі греблі з водоводом без зони вимиву



**Рис. 7.** Розподіл компонента градієнта напорів  $\frac{\partial h}{\partial y}$   
в тілі греблі з водоводом та зоною вимиву

Порівнюючи графіки на рисунках 6 та 7 видно, що наявність зони вимиву в тілі греблі значним чином впливає на градієнт напору. В зоні вимиву він стає набагато більшим (максимальне значення близько 1,5). Наявність високих градієнтів напорів сприяє подальшому вимиву ґрунту через пошкодження у водоводі. Це може призвести до збільшення зони вимиву.

**Висновки.** Наявність зони вимиву призводить до різкого зростання градієнтів напорів в околі даної зони. Таке зростання градієнтів напорів призводить до збільшення швидкості руху порової рідини. Це, в свою чергу, може призвести до збільшення зони вимиву і до повного руйнування тіла греблі. Тому нехтувати можливими зонами вимиву у випадку руйнування частини водоводу в тілі греблі не можна. Дослідження динаміки зміни розмірів зони вимиву в часі має стати напрямком наших подальших робіт.

#### Список використаних джерел:

1. Анахаев К. Н. Об авариях и повреждениях земляных плотин с водоводами и способы совершенствования противофильтрационной защиты / К. Н. Анахаев, К. А. Гегиев, Б. Х. Амшонов // Гидротехническое строительство. — 2004. — №3. — С. 30–36.
2. Бахвалов Н. С. Численные методы / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. — М. : Бинوم. Лаборатория знаний, 2008. — 640 с.

3. Власюк А. П. Фільтраційна консолідація глинистих ґрунтів при наявності масопереносу солей / А. П. Власюк, О. В. Жеребят'єв. // Вісник Укр. держ. акад. водн. госп-ва. — 1998. — Вип. 1. — С. 40–43.
4. Власюк А. П. Математичне моделювання консолідації ґрунтів при фільтрації солов'яних розчинів в неізотермічних умовах / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. — Рівне : НУВГП, 2008. — 416 с.
5. Власюк А. П. Чисельне розв'язування задач консолідації та фільтраційного руйнування ґрунтів в умовах тепло-масопереносу методом радіальних базисних функцій / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк. — Рівне : НУВГП, 2010. — 277 с.
6. Власюк А. П. Контактний размыв и фильтрационная консолидация грунтов в условиях тепло-солепереноса / А. П. Власюк, П. М. Мартинюк // Математическое моделирование. — 2012. — Т. 25, № 11. — С. 97–112.
7. Гогоберидзе М. И. Обобщение данных статистического анализа аварий и инцидентов в аспекте надежности плотин / М. И. Гогоберидзе и др. — Сообщения АН Груз. ССР. — 1977. — Вип. 86, №3. — С. 681–684.
8. Иванов П. Л. Грунты и основания гидротехнических сооружений / П. Л. Иванов. — М. : Высшая школа, 1991. — 447 с.
9. Истомин В. И. О научном подходе к расчетам устойчивости грунтовых откосов / В. И. Истомин // Гидротехника. — 2012. — Вип. 2. — С. 100–105.
10. Красильников Н. А. Сопоставительные исследования методов расчета устойчивости откосов и уровня риска аварий грунтовых плотин при оценке их надежности и безопасности в эксплуатационный период / Н. А. Красильников, Н. Ф. Арипов, В. Ф. Корбашов // Гидротехническое строительство. — 2004. — Вип. 5. — С. 6–10.
11. Мартинюк П. М. Про задачу фільтрації в греблі з водоводом / П. М. Мартинюк, Н. В. Медвідь // Сучасні проблеми математичного моделювання та обчислювальних методів : тези доповідей Всеукраїнської наукової конференції. — Рівне, 2013. — 105 с.
12. Молчанов И. Н. Машинные методы решения прикладных задач. Алгебра, приближение функции / И. Н. Молчанов. — К. : Наук. думка, 1987. — 288 с.
13. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.
14. Флорин В. А. Основные уравнения динамики грунтовой массы / В. А. Флорин // Изв. НИИГ. — 1939. — Т. 15. — С. 87–103.
15. Флорин В. А. Теория уплотнения земляных масс / В. А. Флорин. — М. : Госстройиздат, 1948. — 284 с.
16. Флорин В. А. Основы механики грунтов / В. А. Флорин. — Ленинград : Госстройиздат, 1961. — Т. II. — 543 с.
17. Цытович Н. А. Прогноз скорости осадок оснований сооружений / Н. А. Цытович, Ю. К. Зарецкий, М. В. Малышев, М. Ю. Абелев. — М. : Госстройиздат, 1967. — 237 с.
18. Kansa E. J. Multiquadrics — a scattered data approximation scheme with applications to computational fluid-dynamics. II. Solutions to parabolic, hyperbolic and elliptic partial differential equations / E. J. Kansa // Comput. Math. Appl. — 1990. — Vol. 19. — P. 147–161.

Mathematical model of the filtration consolidation of earthen dam with erosion zone has been created. Also the influence of the presence of the draining and erosion zone on the magnitude of the pressure and its gradient in the body of the dam were researched. Series of numerical experiments were conducted and analysis of their results have been made.

**Key words:** *zone erosion, filtration consolidation, earthen dam, the free surface.*

Отримано: 20.02.2014

УДК 681.586-45.29.33

**В. І. Мороз**, д-р техн. наук, професор,  
**П. А. Болкот**, молодший науковий співробітник,  
**І. Ф. Снітков**, старший науковий співробітник,  
**К. І. Снітков**, молодший науковий співробітник

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

## **АНАЛІЗ РЕАЛІЗАЦІЙ МЕТОДІВ ВИЗНАЧЕННЯ КУТА ПРИ ОБРОБЦІ СИГНАЛІВ З ІНДУКЦІЙНИХ ДАВАЧІВ КУТА**

У статті проведено аналіз точності застосованих методів обробки інформації з індукційних давачів кута повороту і показано переваги комбінованого способу. Для визначення кута використано ортогональні складові сигналу з індукційного давача з наступною обробкою за різними законами, для яких проведено порівняльний аналіз. Запропоновано оптимальну функцію для визначення фази сигналу на основі реалізації функції арктангенса інтегральним методом.

**Ключові слова:** *визначення фази, давачі кута повороту, інтегральні методи, обробка сигналів.*

**Постановка проблеми.** Індукційні електромеханічні перетворювачі до цього часу є одним з популярних елементів позиційних систем керування внаслідок доволі простої конструкції, невибагливості до зовнішніх умов і невисокої вартості порівняно з оптичними давачами. Подальше підвищення точності таких давачів можливе лише шляхом застосування математичних методів обробки їх сигналів, оскільки резерв підвищення точності механічного виготовлення практично вичерпано. Розв'язати цю задачу можливо з переходом до цифрових систем вимірювання.

Пряме вимірювання фази сигналу, що поступає з індукційного давача кута, можливе лише з невисокою точністю внаслідок низки технічних причин, зокрема:

- рівень «зашумленості» сигналу з обмоток давача може складати декілька відсотків, що значно знижує точність правильного визначення переходу сигналу через нуль і, отже, його фази внаслідок